Risposta in Frequenza

Si dimostra che un sistema sollecitato da un segnale sinusoidale fornisce a regime una risposta sinusoidale con un'ampiezza e con una fase generalmente diverse da quelle della sollecitazione applicata. Sulla base di queste considerazioni è stato sviluppato un metodo di analisi e di progettazione dei sistemi basato sulla risposta in frequenza.

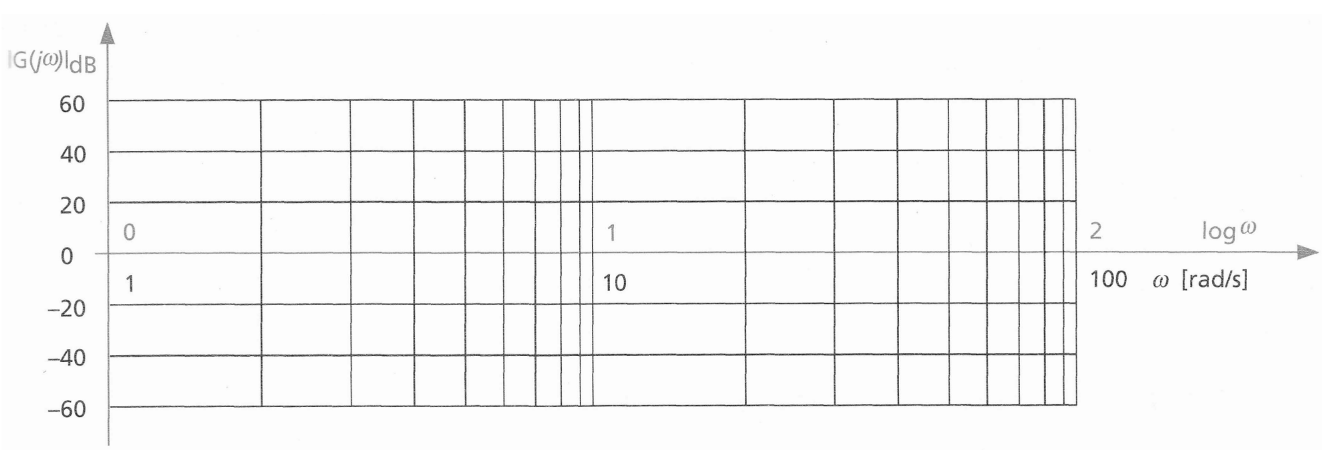
Per risposta in frequenza si deve intendere la risposta a regime di un sistema sollecitato da un segnale sinusoidale.

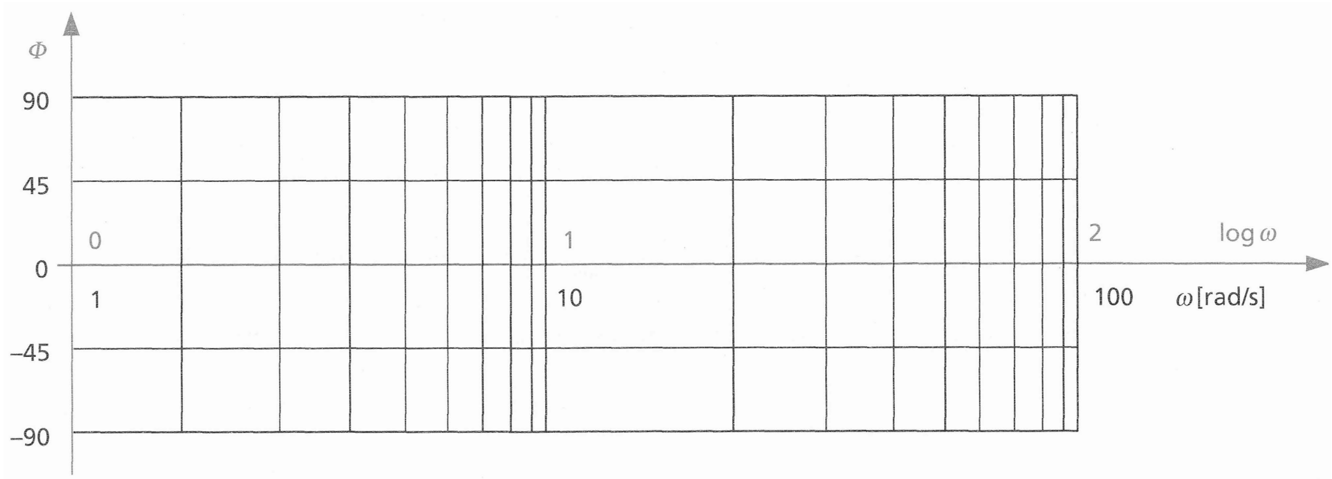
Nell'analisi di un sistema per mezzo della risposta in frequenza la variabile complessa s è costituita dalla sola parte immaginaria $j\omega$, la funzione di trasferimento è funzione della sola variabile $j\omega$ ed è caratterizzata da un modulo e da una fase che possono essere facilmente rappresentati in modo grafico. L'analisi di un sistema nel dominio della frequenza risulta particolarmente agevole perché in laboratorio si possono utilizzare generatori di segnali sinusoidali con range di frequenza e di ampiezza variabili. Un secondo vantaggio offerto da questa metodologia di studio consiste nella possibilità di ricavare la funzione di trasferimento di un sistema dall'analisi della sua risposta in frequenza effettuata sperimentalmente. L'analisi in frequenza offre però scarse possibilità, fatta eccezione per i sistemi del secondo ordine, di correlare i risultati della risposta in frequenza con quelli della risposta temporale.
In questa unità sono esposti i concetti principali dell'analisi in frequenza con particolare riferimento ai diagrammi di Bode.

Diagrammi di Bode

Il diagramma di Bode è un diagramma cartesiano con il quale è possibile rappresentare in funzione della pulsazione ω il modulo e la fase di una funzione $G(j\omega)$. Il modulo e la fase aventi rispettivamente come unità di misura il decibel e il grado, sono riportati sull'asse delle ordinate in scala lineare, mentre la pulsazione ω è riportata sull'asse delle ascisse in scala logaritmica con il logaritmo a base 10.

In tal modo il modulo e la fase della funzione di trasferimento armonica $G(j\omega)$ possono avere una rappresentazione particolarmente efficace sui fogli di carta semilogaritmica riportati nelle figure seguenti.





Una rappresentazione di questo tipo ha anche il vantaggio di semplificare le operazioni perchè le moltiplicazioni e le divisioni si trasformano rispettivamente in addizioni e sottrazioni.

I valori della pulsazione ω e quelli di $\log\omega$ sono riportati sullo stesso asse delle ascisse perché si ha una corrispondenza biunivoca tra la scala logaritmica e quella lineare.
Tale rappresentazione è necessaria per comprendere la trattazione teorica e l'uso pratico dei diagrammi di Bode. Infatti si ha:

$$\omega = 1 \Rightarrow \log 1 = 0 \qquad \omega = 10 \Rightarrow \log 10 = 1 \qquad \omega = 100 \Rightarrow \log 100 = 2$$

Per tracciare rapidamente i diagrammi di Bode del modulo $|G(j\omega)|_{dB}$ e della fase di una funzione complessa è necessario che essa sia scritta in una forma opportuna, detta ***forma di Bode***:

$$G(s) = K_0 \cdot \frac{(1+s\tau_1)\cdot(1+s\tau_2)\cdot\cdots\cdot(1+s\tau_m)}{(s)^q \cdot (1+sT_1)\cdot(1+sT_2)\cdot\cdots\cdot(1+sT_{n-q})}$$

dove:
- K_0 è una costante reale;
- τ_1, τ_2, τ_m, T_1, T_2, T_n sono le costanti di tempo.

Per tracciare il diagramma asintotico del modulo $|G(j\omega)|_{dB}$ della funzione è necessario:
- tracciare preliminarmente i diagramma asintotico del modulo $|G(j\omega)|_{dB}$ dei singoli termini i quali, come si vedrà, coincidono quasi sempre con i diagrammi dei termini elementari che saranno esaminati di seguito;
- addizionare per ogni ascissa le ordinate dei singoli termini.

Per tracciare il diagramma asintotico della fase di una funzione è necessario:
- tracciare preliminarmente il diagramma della fase di ogni termine elementare;
- addizionare per ogni ascissa le ordinate dei singoli termini.

Di seguito sono illustrate le procedure che bisogna seguire per tracciare i diagrammi di Bode delle seguenti funzioni elementari:

- $G(s) = k$
- $G(s) = 1 + s\tau$
- $G(s) = \dfrac{1}{1 + s\tau}$
- $G(s) = s$
- $G(s) = \dfrac{1}{s}$

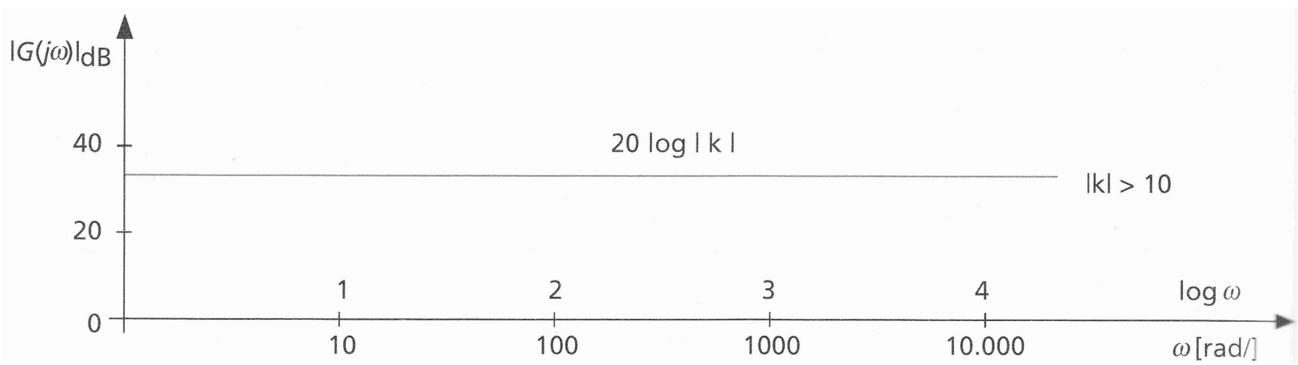
Funzione $G(s) = k$ con $k > 1$

Il modulo $|G(j\omega)|$ espresso in dB e la fase ϕ di una funzione $G(j\omega) = k$ sono:

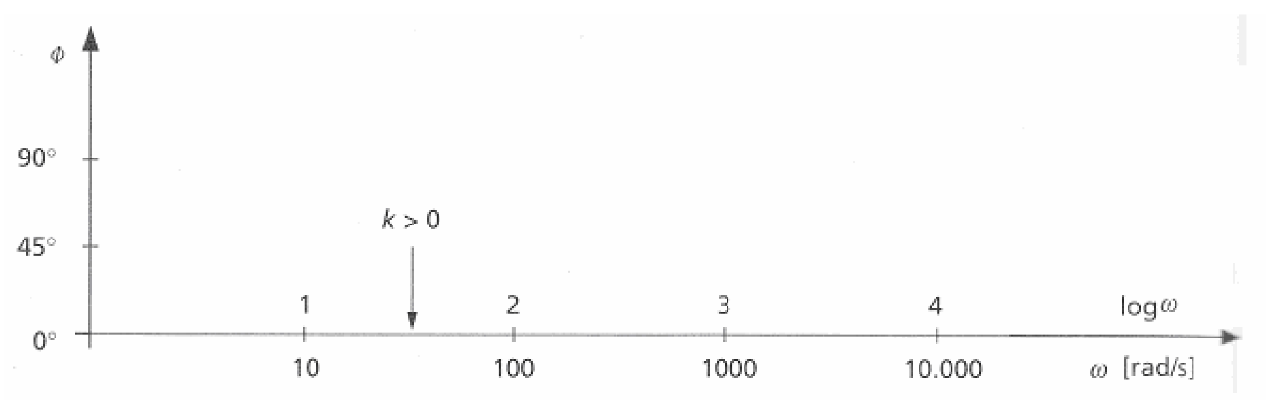
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|k| \qquad \phi = \arctan\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega)]}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|k| \ \text{ se } |k| \geq 1 \qquad \phi = 0° \ \text{ se } |k| \geq 0$$

Il diagramma di Bode del modulo $|G(j\omega)|_{dB}$ della funzione $G(j\omega) = k$ è costituito da una retta parallela all'asse delle ascisse e definita dalla relazione $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|k|$ se $|k| \geq 1$.



Il diagramma di Bode della fase della funzione $G(j\omega) = k$ è costituito da una retta definita dalla relazione $\phi = 0°$ se $|k| \geq 0$.



Funzione $G(s)=1+s\tau$

Si consideri la funzione:

$G(s)=1+s\tau$
1
la quale presenta uno zero reale e negativo $z_1=-\frac{1}{0{,}1}$, una costante di tempo $\tau=0{,}1$ s e una pulsazione d'angolo $\omega_c=\frac{1}{0{,}1}=10$ rad/s.

La pulsazione ω_c, è sempre uguale al reciproco della costante di tempo quando la funzione è un polinomio di primo grado del tipo $G(s)=1+s\tau$.
Per $s=j\omega$ s, il modulo in dB e la fase della funzione sono:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB}=20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{10}\right)^2} \qquad \phi=\arctan\frac{\omega}{10}$$

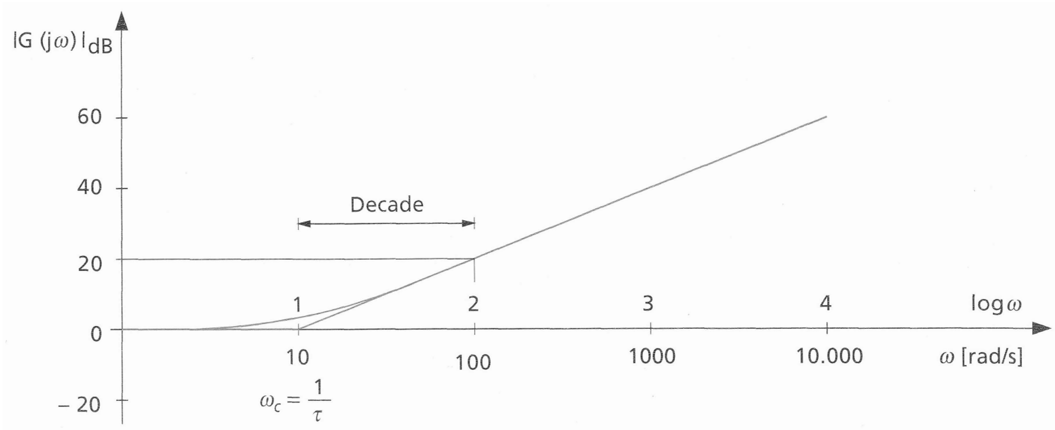
Per tracciare il diagramma asintotico del modulo espresso in dB e della fase della funzione $G(j\omega)$ si considerano valori di o maggiori e minori della pulsazione d'angolo. Il modulo in dB è:

- Per $\omega<<10\Rightarrow\left(\frac{\omega}{10}\right)^2<<1$ e pertanto è $\left|G(j\omega)\right|_{dB}=20\log 1=0$ dB
- Per $\omega>>10\Rightarrow\left(\frac{\omega}{10}\right)^2>>1$ e pertanto è $\left|G(j\omega)\right|_{dB}=20\log\sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$ dB
-

Il modulo della funzione $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$, espresso in dB, subisce una variazione di $+20$ dB ogni volta che ω aumenta di un fattore 10 rispetto al valore della pulsazione d'angolo (si dice che il diagramma ha una pendenza di +20 dB per decade).

Infatti, posto $\omega_c=10$ rad/s si ha:

- Per $\omega=10$ rad/s $\Rightarrow$ $\left|G_1(j\omega)\right|_{dB}=20\log\sqrt{\left(\frac{10}{10}\right)^2}\cong 0$ dB
- Per $\omega=100$ rad/s $\Rightarrow$ $\left|G_2(j\omega)\right|_{dB}=20\log\sqrt{\left(\frac{100}{10}\right)^2}\cong 20$ dB
- $\left|G_2(j\omega)\right|_{dB}-\left|G_1(j\omega\right|_{dB}=\Delta\left|G(j\omega)\right|_{dB}=20\log 10-20\log 1=20$ dB



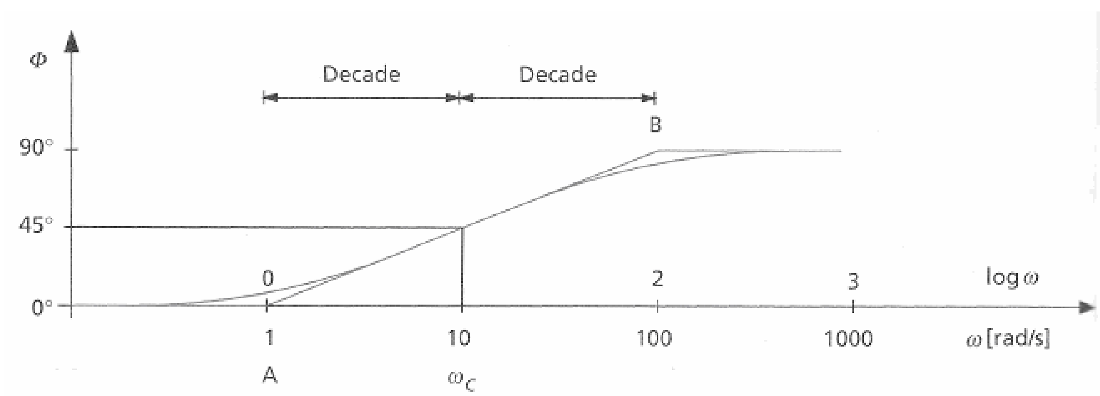
In figura viene rappresentato anche il diagramma vero del modulo della funzione, ossia $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{1+(\omega\tau)^2}$, determinato per punti assegnando ad ω valori compresi nell'intervallo $0{,}1\cdot\omega_c \div 10\cdot\omega_c$. Dall'esame della figura si deduce immediatamente che il diagramma asintotico può rappresentare quello vero perché gli errori commessi sono trascurabili quando la pulsazione ω assume i valori $\omega < 0{,}1\cdot\omega_c$ e $\omega > 10\cdot\omega_c$ w > 10, mentre nell'intervallo $0{,}1\cdot\omega_c \le \omega \le 10\cdot\omega_c$ l'errore massimo commesso è uguale a +3 dB come si ricava dalla seguente relazione ponendo $\omega = \omega_c$ e $\tau = \frac{1}{\omega_c}$:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{10}\right)^2} = 20\log\sqrt{1+\left(\frac{10}{10}\right)^2} \cong 3 \text{ dB}$$

Per tracciare il diagramma asintotico della fase si fanno le seguenti ipotesi semplificative:

- Per $\omega \le 0{,}1\cdot\omega_c$ si assume $\phi = \arctan\frac{1}{10} = 0°$
- Per $\omega = \omega_c \Rightarrow \phi = \arctan\frac{10}{10} = 45°$
- Per $\omega \ge 10\cdot\omega_c$ si assume $\phi = \arctan\frac{100}{10} = +90°$

Pertanto, il diagramma asintotico della fase è la linea spezzata rappresentata in figura:



- una semiretta orizzontale che ha origine nel punto di coordinate ($0{,}1 \cdot \omega_c$, 0°) e definita dalla relazione $\phi = 0°$ per valori di $\omega \le 0{,}1 \cdot \omega_c$;
- una semiretta orizzontale che ha origine nel punto di coordinate ($10 \cdot \omega_c$, 90°) e definita da $\phi = 90°$ per valori di $\omega \ge 10 \cdot \omega_c$;
- un segmento AB con pendenza costante uguale a 45° per decade nell'intervallo $0{,}1 \cdot \omega_c \le \omega \le 10 \cdot \omega_c$.

Confrontando il diagramma approssimato della fase con quello vero, si rileva che essi differiscono in modo significativo nell'intervallo $0{,}01 \cdot \omega_c \le \omega \le 100 \cdot \omega_c$, e lo scostamento massimo è uguale a circa 5,7°. Infatti si ha:

- $\phi = \arctan \dfrac{0{,}1 \cdot \omega_c}{\omega_c} \cong 5{,}71°$ per $\omega = 0{,}1 \cdot \omega_c$
- $\phi = \arctan \dfrac{10 \cdot \omega_c}{\omega_c} \cong 84{,}29°$ per $\omega = 10 \cdot \omega_c$

Funzione $G(s) = \dfrac{1}{1 + s\tau}$

Si consideri la funzione:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s \cdot 0{,}1}$$

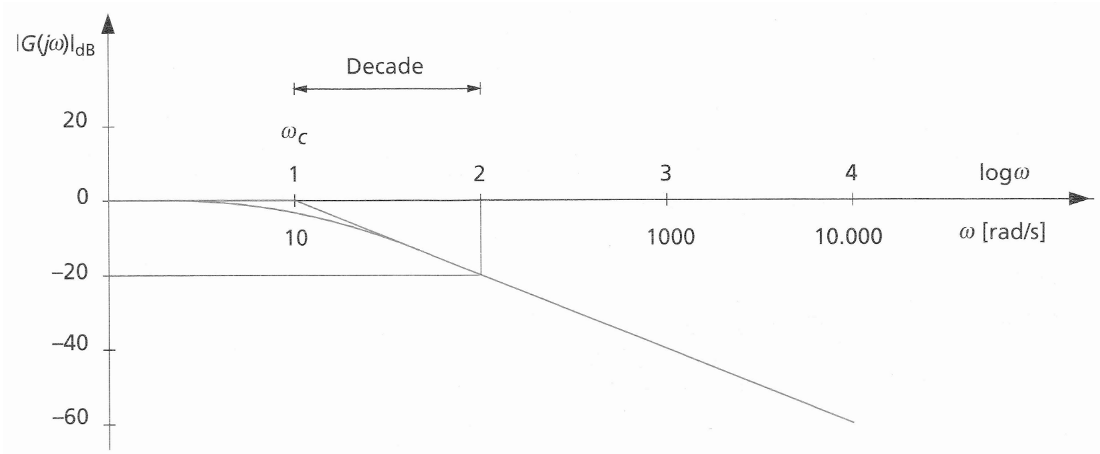
la quale presenta un polo reale e negativo $p = -\dfrac{1}{0{,}1}$ e una pulsazione d'angolo $\omega_c = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$ rad/s. Per $s = j\omega$, si ha:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log 1 - 20\log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} \qquad\qquad \phi = -\arctan \frac{\omega}{10}$$

Seguendo la procedura esaminata si ha:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} = 0 \text{ dB per } \omega \le 10 \\ = -20\log \sqrt{\left(\dfrac{\omega}{10}\right)^2} \text{ per } \omega \ge 10 \end{cases}$$

Il diagramma asintotico del modulo $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$ di una funzione con un polo reale e negativo è una linea spezzata, costituita da due semirette aventi l'origine comune nel punto di ascissa $\omega = \omega_c$.



Il modulo della funzione $\left|G(j\omega)\right|_{dB}$, espresso in dB, subisce una variazione di -20 dB ogni volta che ω aumenta di un fattore 10 rispetto al valore della pulsazione d 'angolo (si dice che il diagramma ha una pendenza di -20 dB per decade).

Dalla figura precedente si deduce che il diagramma asintotico del modulo coincide in pratica con quello determinato per punti quando la pulsazione è $\omega < 0{,}1 \cdot \omega_c$ e $\omega > 10 \cdot \omega_c$, mentre nell'intervallo $0{,}1 \cdot \omega_c \le \omega \le 10 \cdot \omega_c$ i due diagrammi differiscono in modo significativo e lo scostamento massimo è uguale a -3 dB. Infatti, posto $\omega = \omega_c$, si ha:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = -20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_c}\right)^2} = -20\log\sqrt{1+1} \cong -3 \text{ dB}$$

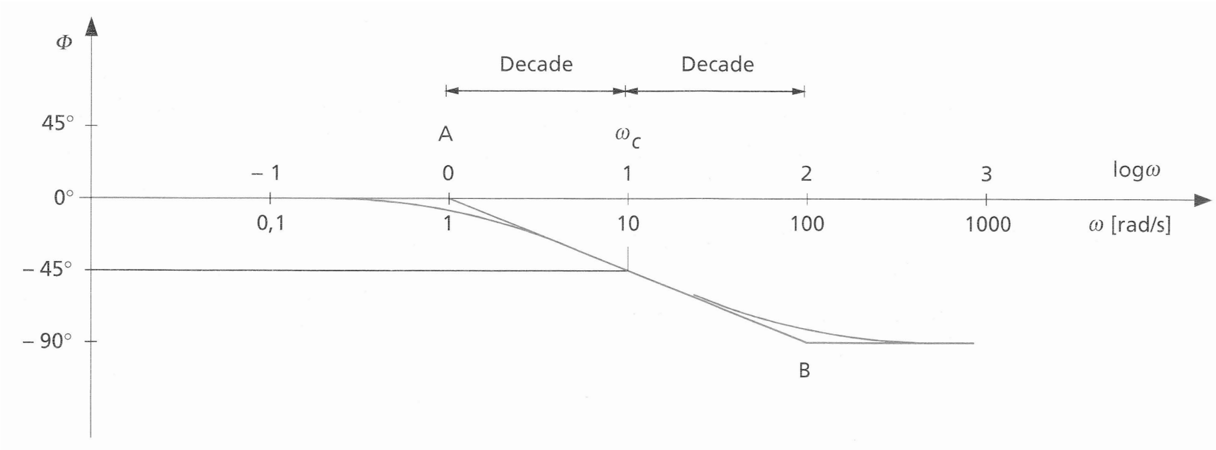
La fase della funzione è:

- Per $\omega \le 0{,}1 \cdot \omega_c$ si assume $\phi = -\arctan\frac{1}{10} = 0°$
- Per $\omega = \omega_c \Rightarrow \phi = -\arctan\frac{10}{10} = -45°$
- Per $\omega \ge 10 \cdot \omega_c$ si assume $\phi = -\arctan\frac{100}{10} = -90°$

Il diagramma asintotico della fase di una funzione del tipo $G(s) = \frac{1}{1+s\tau}$ è una linea spezzata costituita da due semirette e un segmento:

- una semiretta orizzontale che ha origine nel punto di coordinate ($0{,}1 \cdot \omega_c$, 0°) e definita dalla relazione $\phi = 0°$ per valori di $\omega \le 0{,}1 \cdot \omega_c$;
- una semiretta orizzontale che ha origine nel punto di coordinate ($10 \cdot \omega_c$, -90°) e definita da $\phi = -90°$ per valori di $\omega \ge 10 \cdot \omega_c$;

- un segmento AB con pendenza costante uguale a -45° per decade nell'intervallo $0{,}1 \cdot \omega_c \leq \omega \leq 10 \cdot \omega_c$.



Osservando la figura, si conclude che lo scostamento massimo tra il diagramma asintotico e quello analitico è uguale a circa 5,71°. Quest'ultimo valore è identico allo scostamento osservato nello studio del diagramma della fase della funzione di trasferimento con uno zero reale e negativo.

Funzione $G(s) = s$

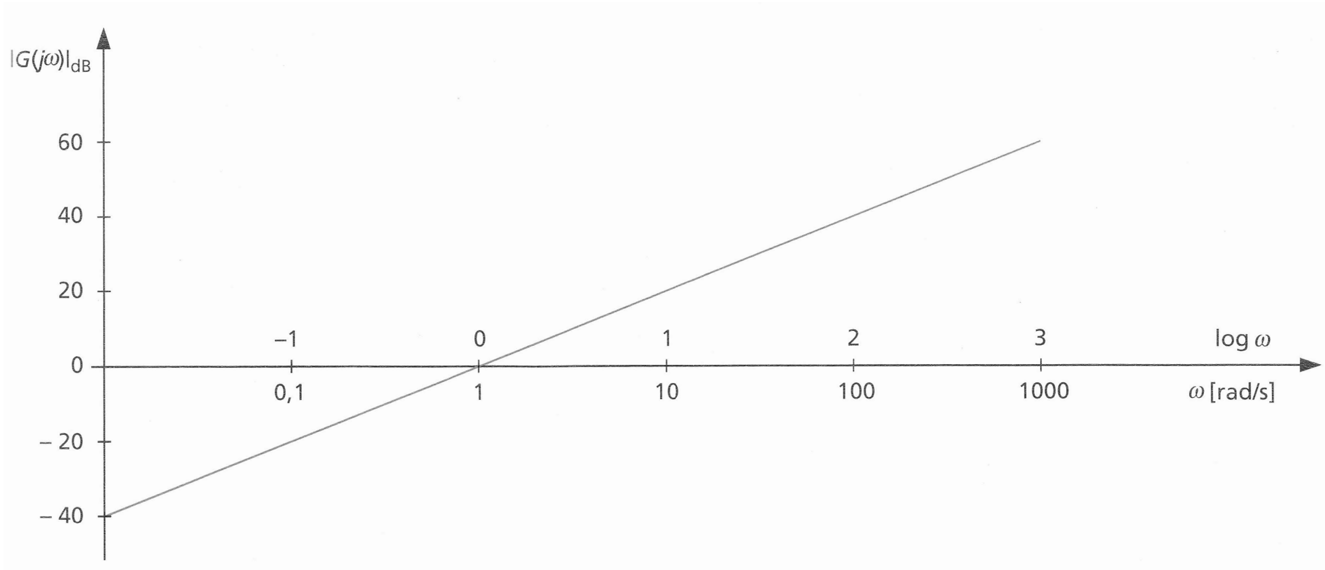
Studiare e rappresentare con i diagrammi di Bode la funzione $G(s) = s$, la quale presenta uno zero nullo $s = 0$. Per $s = j\omega$ si scrive:

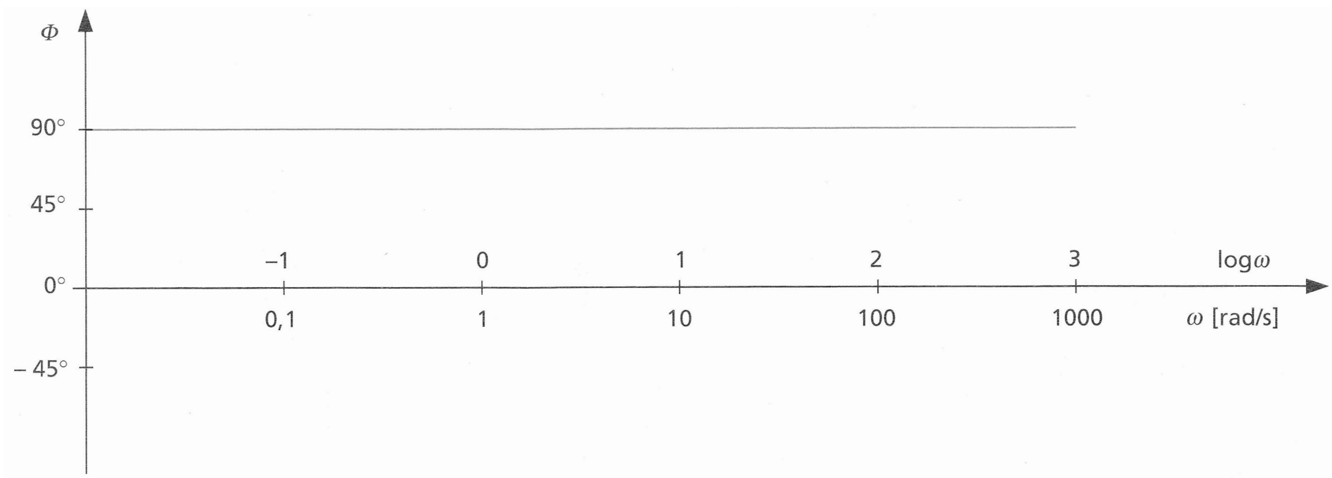
$$G(j\omega) = 0 + j\omega$$

Il modulo $|G(j\omega)|_{dB}$ e la fase ϕ sono:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{\omega^2} = 20\log\omega \qquad \phi = \arctan\frac{\omega}{0} \Rightarrow +90°$$

- Il diagramma del modulo $|G(j\omega)|_{dB}$ è una retta con pendenza costante di +20 dB per decade e passante per il punto di coordinate (1, 0).
- Il diagramma della fase della funzione $G(j\omega) = j\omega$ è una retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $\phi = +90°$ per ogni $\omega > 0$.





Funzione $G(s)=\frac{1}{s}$

Si studi e si rappresenti con i diagrammi di Bode la funzione $G(s)=\frac{1}{s}$ la quale presenta un polo nullo *s=0*.

Per $s=j\omega$ il modulo in dB e la fase sono:

$$|G(j\omega)|_{dB}=-20\log\omega \qquad \phi=-\arctan\frac{\omega}{0}\Rightarrow -90°$$

- Il diagramma del modulo $|G(j\omega)|_{dB}$ è una retta con pendenza costante uguale a - 20 dB per decade e passante per il punto di coordinate (1,0).

- Il diagramma della fase della funzione $G(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega}$ è una retta parallela all'asse delle ascisse e avente equazione $\phi = -90°$ per ogni $\omega > 0$.